





Problem zaczyna się jednak pojawiać w wielu innych zastosowaniach akwizycji sygnałów, gdzie istotnymi czynnikami są czas wykonywania pomiaru, ilość danych jaką musimy przechowywać bądź przysyłać oraz niekorzystny wpływ procesu akwizycji danych na środowisko czy badany obiekt. Przykładem takiego „problematicznego” procesu akwizycji danych może być proces obrazowania medycznego szeroko stosowany w diagnostyce medycznej. W wielu badaniach medycznych stosuje się czynniki szkodliwe dla zdrowia i życia człowieka. W szczególności może chodzić tutaj o promieniowanie rentgenowskie. Możliwość zmniejszenia ilości niezbędnych do wykonania pomiarów (w tym wypadku chodzi o zmniejszenie dawki promieniowania) oznacza znacznie mniejszą szkodliwość badania. Z drugiej strony przy tej samej dawce promieniowania co w dotychczas stosowanych metodach, możliwe jest wykonanie znacznie większej ilości obrazów diagnostycznych, co może przyczynić się do postawienia lepszej diagnozy. Każdy z wariantów jest niezwykle istotny dla medycyny.

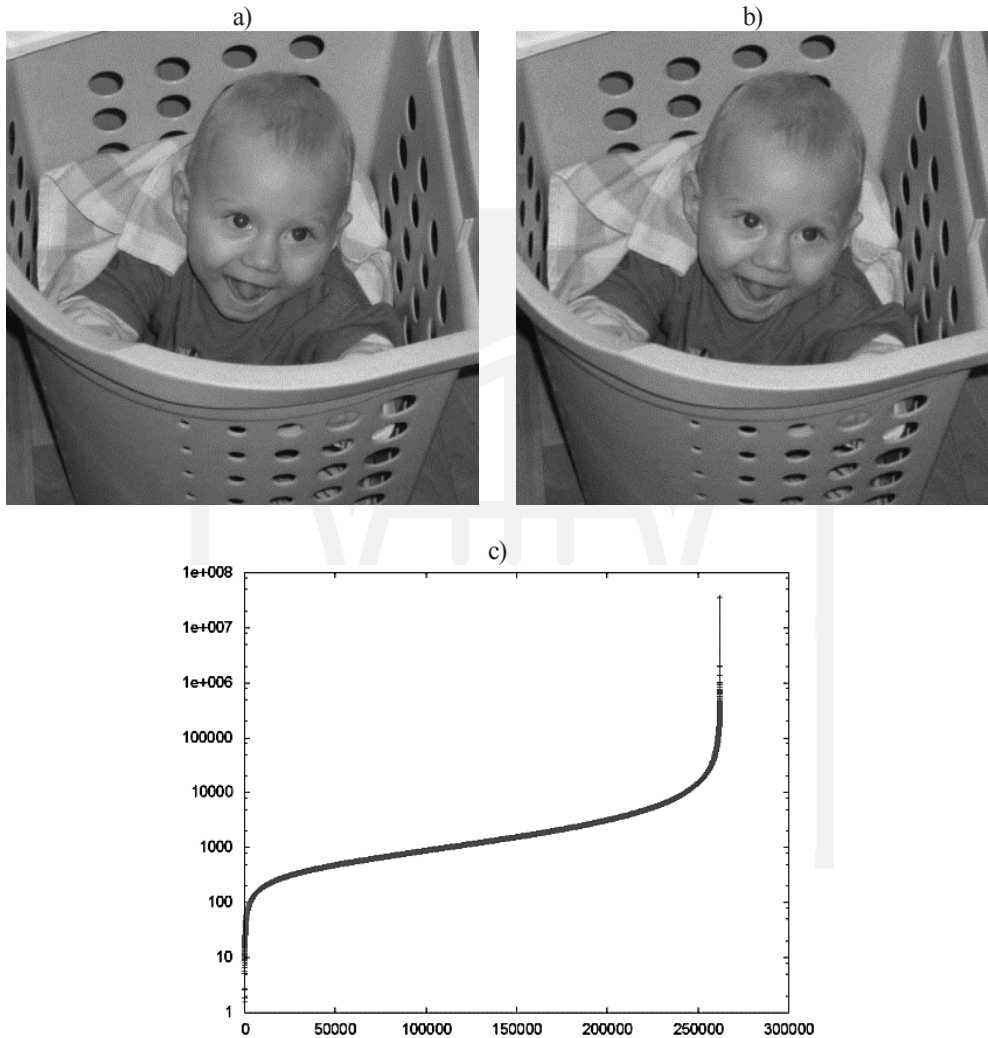
Kolejnym pozytywnym efektem zmniejszenia ilości pomiarów jest skrócenie czasu badania. Zmniejszenie ilości danych pomiarowych oznacza, że możemy badanie przeprowadzić w znacznie krótszym czasie. Pociąga to za sobą przynajmniej dwie istotne korzyści. Wiele badań w diagnostyce medycznej z wykorzystaniem promieniowania wymaga od pacjenta bezruchu, często bezdechu. Kilkakrotne skrócenie czasu badania ma niezwykle istotny wpływ na komfort jego przeprowadzania. Warto również zauważyć zysk ekonomiczny. Badania z wykorzystaniem wszelkich urządzeń obrazowania medycznego (np. tomografu komputerowego) są badaniami kosztownymi. Skrócenie czasu badania powoduje, że w tym samym czasie możliwe będzie przebadanie większej ilości pacjentów, co z pewnością obniży koszty pojedynczego badania.

Innymi „problematicznymi” sytuacjami, w których pomiar jest kosztowny, gdzie istotne może okazać się zmniejszenie częstości próbkowania, są wszelkiego rodzaju zastosowania, gdzie koszt utworzenia detektora jest drogi. Chodzi tu o koszt ekonomiczny. Również w sytuacjach, gdzie detektor szybko degraduje się (ulega zniszczeniu, bądź jego dokładność działania drastycznie obniża się wraz z ilością dokonanych pomiarów) minimalizacja ilości pomiarów jest istotna. Z podobną sytuacją mamy do czynienia wtedy, gdy konieczne jest pokrycie siecią detektorów znacznej powierzchni. Zmniejszenie gęstości detektorów niezbędnej do przeprowadzenia wiernej rekonstrukcji sygnału może się w takich zastosowaniach okazać bardzo cenne.

## 2. Co to jest próbkowanie oszczędne

**Próbkowanie oszczędne** jest procesem pomiaru sygnałów rzadkich i następnie rekonstrukcji tych sygnałów z niepełnych o nich danych (w porównaniu do klasycznych metod pomiarowych). Aby wprowadzić pojęcie próbkowania oszczędnego, przeprowadźmy analizę pomiaru typowego sygnału, jakim jest obraz (wykonywanie cyfrowej fotografii). Dokonywany jest pomiar wielu wartości (pomiar koloru dla każdego punktu matrycy światłoczułej), a następnie wykonywana jest operacja kompresji stratnej (np. JPEG lub JPEG2000), w której następuje znacząca redukcja ilości danych reprezentujących sygnał. Kompresja w tym wypadku polega na rozkładzie mierzonego sygnału na składowe w bazie, w której opis jest bardziej zwarty (w bazie fourierowskiej dla JPEG, czy bazie falkowej

dla JPEG2000) i usunięciu składowych o niewielkiej amplitudzie. Pokazuje to przykład na rysunku 1, gdzie pomimo usunięcia blisko 85% składowych możliwa jest poprawna rekonstrukcja. Pojawia się zatem pytanie, czy wobec tego nie można dokonywać pomiaru tylko tych składowych sygnału, które są dla niego istotne i wnoszą znaczną ilość informacji, a pomijać te składowe, które mają niewielki wpływ na badany sygnał?



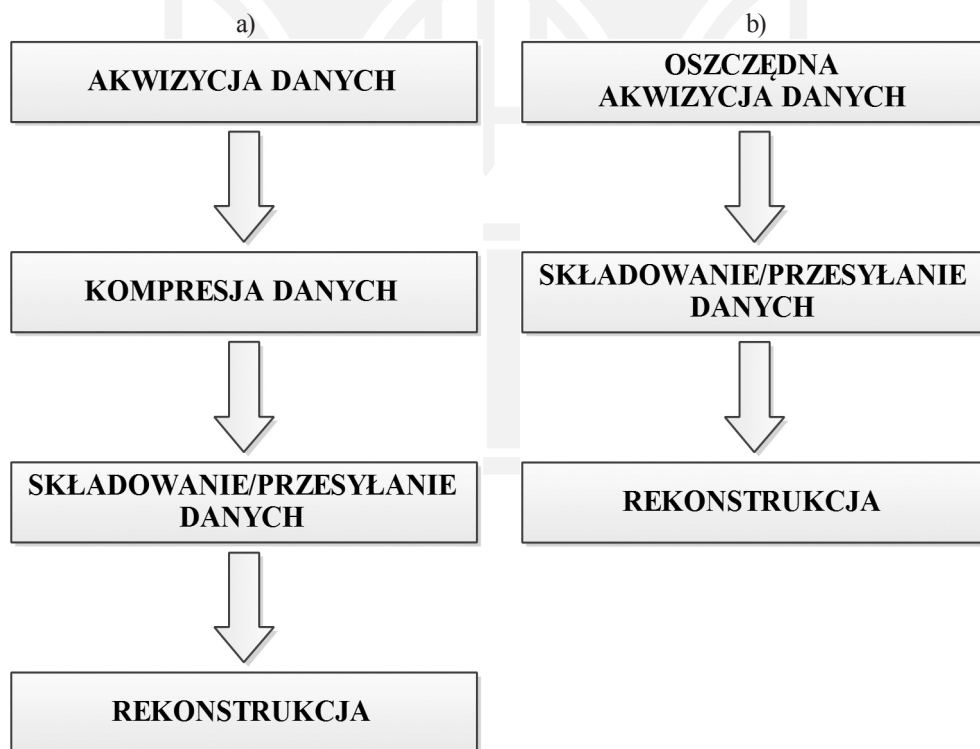
Rys. 1. a) obraz oryginalny, b) obraz zrekonstruowany po odrzuceniu około 85% składowych fourierowskich, c) posortowane wartości bezwzględne składowych fourierowskich dwuwymiarowej transformaty obrazu oryginalnego – skala logarytmiczna

Fig. 1. a) original image, b) image reconstructed after rejecting about 85% of the Fourier components, c) sorted absolute values of the two-dimensional Fourier transform components of the original image – logarithmic scale

W typowym podejściu nie jest to możliwe, gdyż proces pomiaru jest adaptacyjny (zależy od danych). Oznacza to, że przed rozpoczęciem pomiarów nie wiemy, które składowe będą istotne – mierzymy wszystkie, a potem usuwamy te, których amplituda jest mała. Nam chodzi o określenie protokołu pomiaru, który nie będzie zależał od danych i nie będzie potrzebował do przeprowadzenia rekonstrukcji wszystkich małych składowych sygnału. Wyjściem jest stworzenie protokołu, który nie zależy od danych i pozwala na odzyskanie wszystkich ważnych składowych sygnału, bazując na niewielkiej ilości pomiarów w stosunku do naturalnego rozmiaru sygnału.

Próbkowanie oszczędne jest właśnie takim protokołem pomiaru. Unika mierzenia wszystkich składowych. Dokonywany jest pomiar stosunkowo niewielkiej ilości danych (w stosunku do naturalnego rozmiaru sygnału), a co równie istotne, jest to proces niezależny od danych.

Rysunek 2 schematycznie prezentuje porównanie metody próbkowania oszczędnego ze standardowym podejściem, ukazując jednocześnie, w jaki sposób przeniesiony zostaje nakład pracy z procesu akwizycji do procesu rekonstrukcji sygnału. W przypadku podejścia klasycznego (rys. 2a) duży nakład pracy jest wymagany w procesie akwizycji oraz kompresji danych. Wykonuje się wiele pomiarów, a następnie przeprowadzana jest kompresja danych, która ma usunąć dużą część nieistotnych danych pomiarowych. Proces rekonstrukcji jest procesem stosunkowo prostym.



Rys. 2. Porównanie metod próbkowania oszczędnego (b) z podejściem klasycznym (a)

Fig. 2. Comparison of compressed sensing (b) and the classical approach (a) methods

W przypadku próbkowania oszczędnego (rys. 2b) proces akwizycji danych wymaga stosunkowo niewielkiego nakładu pracy. Wykonywana jest niewielka ilość pomiarów. Duży nakład pracy wymagany jest jednak w procesie rekonstrukcji. Rekonstrukcja jest procesem złożonym, chociaż jej przeprowadzenie opiera się na przetworzeniu niewielkiej ilości danych nt. analizowanego sygnału.

Próbkowanie oszczędne niejako przerzuca ciężar pracy w procesach akwizycji i rekonstrukcji sygnału na jego rekonstrukcję. W przypadku podejścia standardowego wykonywanych jest wiele operacji pomiaru sygnału, a następnie znaczna część tych danych (dane mało istotne) jest odrzucana, gdyż nie jest ona niezbędna do wykonania rekonstrukcji sygnału. Rekonstrukcja sygnału jest procesem stosunkowo prostym ze względu na prostotę stosowanych tu algorytmów obliczeniowych. W przypadku próbkowania oszczędnego wszystkie zmierzone wartości są wykorzystywane w procesie rekonstrukcji. Sam proces rekonstrukcji jest znacznie bardziej skomplikowany niż w przypadku standardowego podejścia. Wynika to z faktu posiadania stosunkowo niewielkiej informacji wstępnej nt. rekonstruowanego sygnału oraz stosowania skomplikowanych algorytmów zapewniających poprawną rekonstrukcję sygnału.

Podejście oszczędne jest sensowne w sytuacjach, gdzie pomiar jest „kosztowny”. Jak wcześniej wspomniano, nie chodzi tu jedynie o koszt ekonomiczny, ale o wiele innych aspektów, jak szkodliwy wpływ pomiaru na obiekt badany, czy istnieje konieczność szybkiego przeprowadzenia akwizycji danych.

### 3. Warunki

Pojawia się oczywiście pytanie, kiedy z tak niewielkiej ilości pomiarów można wiernie zrekonstruować sygnał. Okazuje się, że powodzenie tego procesu jest możliwe przy spełnieniu dwóch warunków:

- warunku dotyczącego własności strukturalnych danych [2, 5], który będziemy nazywać rzadkością,
- ograniczeń na organizację procesu pomiaru danych, którym musi podlegać proces pomiarowy – będziemy je nazywać niekoherencją pomiaru [5].

#### 3.1. Rzadkość

Przez rzadkość rozumiemy własność sygnału, która polega na tym, że daje on się zapisać w zwarty sposób. Oznacza to, że istnieje baza, w której sygnał ten ma niewiele składowych różnych od zera. Oczywiście zawsze można zdefiniować bazę, w której sygnał będzie rzadki (np. bazę w której sygnał odpowiada dokładnie jednemu z wektorów bazowych), ale wtedy wracamy do sytuacji, w której proces akwizycji zależy od sygnału. Tak więc chodzi tutaj o przypadek, w którym w jednej z powszechnie używanych baz (położenia, fourierowskiej, falkowej, noisletowej) sygnał ma niewielką ilość niezerowych składowych.

Sygnały rzadkie to sygnały, których duża część składowych ma wartość równą zero. Mówimy że sygnał  $x$  o długości określanej przez parametr  $n$  jest  $s$ -rzadki, jeżeli  $s$  spośród jego składowych ma wartości różne od zera, a  $n-s$  składowych ma wartości równe zero. O sygnałe rzadkim mówimy gdy:

$$s \ll n \quad (1)$$

gdzie:

$$s, n \in \mathbb{N}^+$$

Oprócz sygnałów rzadkich wprowadza się pojęcie sygnałów prawie rzadkich (kompresowalnych). Znaczna część składowych takich sygnałów ma wartości bliskie zeru, tak że ich pominięcie nie ma większego wpływu na jakość reprezentacji sygnału. Sygnał  $x$  jest sygnałem prawie rzadkim, jeśli znaczna część jego składowych ma wartość bliską zero. Analogicznie do przypadku sygnału rzadkiego możemy dla sygnału o długości  $n$  wyznaczyć  $s$  składowych, których wartości są znaczące w porównaniu z pozostałymi składowymi. Gdy dokonamy posortowania składowych sygnału, ze względu na wartość bezwzględną, to prawie  $s$ -rzadki sygnał spełnia relację:

$$\sum_{i=s+1}^n |x_i| \ll \sum_{i=1}^s |x_i| \quad (2)$$

gdzie:

$$s, n \in \mathbb{N}^+,$$

$x_i$  – składowe sygnału.

Warunek ten gwarantuje, że znaczna część składowych sygnału ma wartości równe 0, co pozwala na ich pominięcie, prowadząc do uproszczenia problemu.

Na rysunku 3 przedstawione są trzy sygnały: a) jest sygnałem pozbawionym rzadkości, b) jest sygnałem rzadkim, c) jest sygnałem prawie rzadkim.

Wiele sygnałów w swojej naturalnej postaci nie wykazuje cech rzadkości. Konieczna jest ich reprezentacja w innej bazie, gdyż rzadkość może się ujawnić po zastosowaniu właściwej bazy dla danego sygnału. Rysunek 1 przedstawia przykład sygnału, który w swojej naturalnej postaci (ciąg pikseli) nie wykazuje cech rzadkości, a które ujawniają się po dokonaniu przejścia do bazy fourierowskiej. Obraz w swojej naturalnej postaci (ry. 1a) nie jest rzadki. Po wykonaniu dwuwymiarowej transformaty Fouriera tego obrazu zauważamy, iż wartości bezwzględne składowych Fouriera w znacznej większości mają wartości bliskie 0 (rysunek 1c prezentuje te wartości posortowane od najmniejszych do największych). Po odrzuceniu około 85% składowych (około 85% najmniejszych wartości zostało wyzerowanych) i wykonaniu transformaty odwrotnej otrzymujemy obraz, którego jakość jest zbliżona do oryginału (rysunek 1b).

Sama rzadkość jednak nie wystarcza. Chcemy z małej ilości pomiarów uzyskać informacje o wszystkich istotnych składowych sygnału. W idealnej sytuacji informacja ta powinna być uzyskana na podstawie  $s$  pomiarów (gdzie  $s$  oznacza rzadkość sygnału). Jest to niemożliwe, ponieważ musielibyśmy z góry wiedzieć, które składowe. Okazuje się jednak, że warunkiem zapewniającym poprawną rekonstrukcję jest warunek wykonania większej ilości pomiarów niż określa to rzadkość sygnału, ale ilość ta może być silnie mniejsza od rozmiaru sygnału:

$$s < k \ll n \quad (3)$$

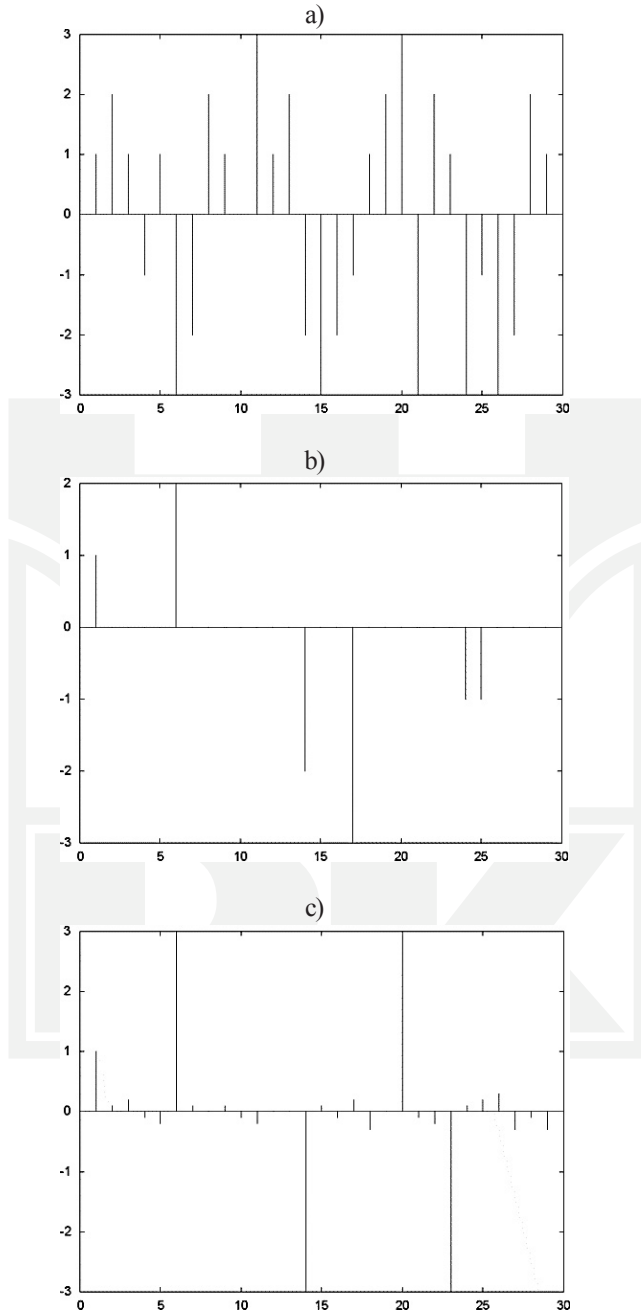
gdzie:

$$s, k, n \in \mathbb{N}^+,$$

$s$  – rzadkość sygnału,

$k$  – ilość niezbędnych pomiarów,

$n$  – rozmiar sygnału.



Rys. 3. a) sygnał o wartościach niezerowych z przedziału  $[-3;3]$ ,  
b) sygnał rzadki, c) sygnał prawie rzadki

Fig. 3. a) signal in range  $[-3;3]$  with non-zero values, b) sparse signal, c) almost sparse signal



### 3.2. Niekoherencja pomiaru

Rzadkość to konieczny, ale niewystarczający warunek powodzenia procesu oszczędnego próbkowania. Oprócz niego musi być spełniony dodatkowy warunek na sposób przeprowadzania pomiaru – musi on być tak zorganizowany, by nie gubić istotnych składowych sygnału. W przypadku sygnałów rzadkich jest to niezwykle istotne (w sygnale takim niewielka ilość składowych niesie istotne informacje i pominięcie części z nich w procesie pomiarowym może skutkować nieskutecznością rekonstrukcji sygnału). Gwarancją takiego zachowania się procesu pomiarowego jest spełnienie warunku niekoherencji pomiaru [5].

Aby wyjaśnić pojęcie niekoherencji pomiaru, zajmijmy się analizą procesu pomiaru. Przez pomiar rozumiemy porównanie sygnału ze wzorcem. W celu dokonania pomiaru musimy wprowadzić układ wzorców zwany bazą pomiarową. Przez pomiar rozumiemy rzutowanie sygnału na bazę pomiarową. W przypadku obrazu z rysunku 1 rozmiar bazy pomiarowej to  $n=w^2$ , gdzie  $w$  oznacza rozdzielczość obrazu. Bazę pomiarową możemy zdefiniować jako:

$$\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1,\dots,n} \quad (4)$$

gdzie:

$\Phi$  – baza pomiarowa,  
 $\varphi_i$  – składowe bazy pomiarowej.

Wynik pojedynczego pomiaru to rzutowanie sygnału na  $i$ -tą składową bazy pomiarowej:

$$b_i = f \cdot \varphi_i \quad (5)$$

gdzie:

$b_i$  – wynik pomiaru  $i$ -tej składowej sygnału,  
 $f$  – sygnał,  
 $\varphi_i$  –  $i$ -ta składowa bazy pomiarowej.

Proces ten macierzowo można przedstawić jako:

$$b = \Phi f \quad (6)$$

gdzie:

$b$  – wynik pomiarów sygnału,  
 $f$  – sygnał,  
 $\Phi$  – baza pomiarowa, gdzie wiersze macierzy są wektorami bazowymi.

Z kolei sam sygnał można przedstawić, stosując jego rozwinięcie w bazie, w której jest on rzadki:

$$f = \sum_{i=1}^n x_i \psi_i \quad (7)$$

gdzie:

$\psi_i$  –  $i$ -ta składowa bazy sygnału,  
 $x_i$  –  $i$ -ta składowa sygnału,  
 $f$  – sygnał.

W zapisie macierzowym relację tą można przedstawić jako:

$$f = \psi x \quad (8)$$

gdzie:

$\psi$  – macierz, której kolumny to kolejne wektory bazy w której sygnał jest rzadki

$x$  – wektor składowych sygnału  $x$ ,

$f$  – sygnał.

Proces pomiaru w zapisie macierzowym polega zatem na przemnożeniu wektora  $f$  przez macierz pomiarową:

$$y = \Phi f = \Phi \psi x = Ax \quad (9)$$

gdzie:

$\Phi$  – baza pomiarowa,

$\psi$  – baza sygnału, w której sygnał jest rzadki,

$x$  – wektor składowych sygnału  $x$ ,

$f$  – sygnał,

$A$  – macierz pomiarowa.

Jak widać w równaniu 9, w procesie akwizycji sygnału będziemy zawsze myśleli o dwóch bazach. Jedna baza to baza sygnału ( $\psi$ ), w której sygnał jest rzadki. Druga baza to baza pomiarowa ( $\Phi$ ) wykorzystywana w celach akwizycji danych. Naturalnym wydaje się pytanie, dlaczego nie ograniczyć się tylko do jednej z nich, tej w której sygnał jest rzadki. Odpowiedź jest prosta – bo musielibyśmy wykonać liczbę pomiarów rzędu  $n$  (gdzie  $n$  oznacza ilość składowych sygnału). Każdy pomiar z wykorzystaniem bazy sygnału daje nam informacje tylko o jednej składowej sygnału. Wynika to z faktu dużej zależności pomiędzy bazą sygnału i bazą pomiarową (w tym przypadku zależność jest maksymalna, bo stosujemy te same bazy). Musielibyśmy wykonać wiele pomiarów, co oznacza, że do celów metod próbkowania oszczędnego konieczne jest wykorzystanie innej bazy, której stopień zależności z bazą sygnału jest jak najmniejszy.

Miarą zależności pomiędzy bazami jest koherencja. Opisana jest ona wzorem:

$$\mu(\Phi, \psi) = \sqrt{n} * \max_{1 \leq k, j \leq n} |\langle \phi_k, \psi_j \rangle| \quad (10)$$

gdzie:

$\Phi$  – baza pomiarowa,

$\psi$  – baza sygnału, w której sygnał jest rzadki,

$n$  – rozmiar baz,

$\phi_i$  – składowe bazy pomiarowej,

$\psi_j$  – wektor bazowy sygnału.

Koherencja pomiędzy dwoma bazami jest miarą największej korelacji pomiędzy dwoma dowolnymi wektorami bazowymi baz. Mierzy ona największą zależność pomiędzy nimi. Zakładając, że obie bazy, o których tutaj mowa, są bazami ortonormalnymi, możemy łatwo uzasadnić, że koherencja przyjmuje wartości z zakresu  $[1, \sqrt{n}]$ . Zauważmy, że iloczyn skalarny dwóch wektorów bazowych może przyjąć wartość maksymalną równą 1 (długości wektorów są równe jeden i cosinus kąta pomiędzy nimi również wynosi 1). Z kolei wartość minimalna maksimum iloczynu skalarnego dwóch wektorów bazowych wyno-

si  $1/\sqrt{n}$ . Jest ona osiągnięta wtedy, gdy wszystkie składowe wektora bazowego jednej z baz mają wartość  $1/\sqrt{n}$ , a drugi wektor bazowy ma wartość jednej ze składowych równą 1, a wartości pozostałych składowych są równe 0. Sytuacja taka ma miejsce, gdy jeden wektor bazowy ma taką samą wartość składowych, a drugi posiada wartość 1 na jednej ze składowych i poza tym wartości 0.

Koherencja powinna być jak najmniejsza. W takiej sytuacji pojedynczy pomiar testuje wartości wielu składowych sygnału. Pozwala to na uzyskanie pełnej informacji o sygnale przy niewielkiej ilości pomiarów. To z kolei gwarantuje wierną rekonstrukcję sygnału (oczywiście pod warunkiem spełnienia innych warunków takich jak rzadkość).

Założmy sytuację, w której jako macierz pomiaru stosujemy macierz bazową sygnału. Założmy, że nasz sygnał reprezentowany jest jak na rysunku 3a) przez wektor:

$$x^T = [1, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 0, 0, -3, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0] \quad (11)$$

Jeżeli zastosujemy jako jeden z wierszy macierzy pomiarowej (wektor bazowy sygnału  $x$ ) wektor o postaci:

$$a_1 = [1, 0] \quad (12)$$

wtedy:

$$a_1 x = 1 \quad (13)$$

Osiągamy dokładną wiedzę o pierwszym elemencie wektora  $x$  i żadnym więcej. Aby uzyskać wiedzę o wszystkich składowych wektora  $x$ , musielibyśmy dokonać tyle pomiarów, ile składowych posiada wektor  $x$ . Jak wcześniej zauważyliśmy, w metodach próbkowania oszczędnego chodzi o to, by ilość niezbędnych pomiarów zminimalizować. Konieczne jest wybranie innych wektorów pomiarowych, takich które mają jak najmniejszą koherencję z wektorami naturalnej bazy sygnału. Wektorem takim może być np. wektor o składowych:

$$a_2 = [0.18, 0.18, 0.18, \dots, 0.18] \in R^{30} \quad (14)$$

gdzie:

$0,18 \approx 1/\sqrt{30}$  – wektor  $x$  posiada 30 składowych.

W wyniku wykorzystania wektora bazowego  $a_2$  posiadamy informację o pewnej kombinacji składowych wektora sygnału, które są niezerowe. W naszym przykładzie wektor  $x$  posiada 6 niezerowych składowych. Po dokonaniu kilku tego typu pomiarów mamy szansę posiadać wiedzę o istotnych składowych sygnału.

### 3.3. Ile wykonać pomiarów

Fundamentalnym pytaniem dla metod *compressed sensing* wydaje się być pytanie: ile wykonać pomiarów, by możliwa była rekonstrukcja sygnału rzadkiego z niepełnych danych? Twórcy tej metody wykazali, iż wartość ta zależy od kilku czynników: ilości składowych sygnału, poziomu jego rzadkości oraz koherencji (zależnej od stosowanych baz) [1]. Wartość ta opisana jest wzorem:

$$k \geq C * \mu^2 (\Phi, \psi) * s * \log(n) \quad (15)$$

gdzie:

- $C$  – pewna stała dodatnia,
- $\mu$  – koherencja pomiędzy bazami  $\Phi$  oraz  $\psi$ ,
- $s$  – rzadkość sygnału,
- $n$  – ilość składowych sygnału.

Z powyższego równania wynika, że koherencja posiada znaczny wpływ na ilość pomiarów, jakie trzeba wykonać, by możliwa była poprawna rekonstrukcja sygnału. Innymi czynnikami są rzadkość sygnału (na nią nie mamy wpływu) oraz jego naturalny rozmiar (też nie mamy wpływu).

#### 4. Własność RIP

Dla metod próbkowania oszczędnego istotnym elementem jest odpowiedni dobór bazy pomiarowej w akwizycji danych (od doboru baz zależy wygląd macierzy pomiarowej), tak aby koherencja pomiędzy bazą sygnału (w której jest on rzadki) a bazą stosowaną w pomiarze była jak najmniejsza. Metoda doboru bazy pomiarowej opierająca się na koherencji nie jest praktyczna. Pozwala na określenie, czy dana macierz pomiarowa cechuje się odpowiednio niską koherencją. Jest miarą, która pozwala sprawdzić, czy dana macierz pomiarowa będzie odpowiednia, ale nie daje przepisu jak ją utworzyć. Powstaje pytanie jaka własność macierzy pomiarowej odpowiada własności niekoherencji baz.

Jakie własności musi posiadać macierz pomiarowa ( $A$ ), by gwarantowała poprawną rekonstrukcję mierzonego sygnału? Działa ona na rzadkie dane, a co za tym idzie, tylko jej część efektywnie wpływa na dane (tam gdzie składowe sygnału są różne od 0).

Twórcy metody próbkowania oszczędnego podali sposób pozwalający na dobranie macierzy pomiaru, która będzie posiadać niewielką koherencję z bazą sygnału badanego. Macierz taka musi spełniać własność o nazwie Restricted Isometry Property (RIP) [1,7]. By ją zdefiniować konieczne jest wprowadzenie stałej izometrii  $\delta_s$ , określonej dla danej rzadkości  $s$ , jako najmniejsza wartość spełniająca poniższy warunek:

$$(1 - \delta_s) \|x\|_{l_2}^2 \leq \|Ax\|_{l_2}^2 \leq (1 + \delta_s) \|x\|_{l_2}^2 \quad (16)$$

gdzie:

- $x \in R^n$  – badany sygnał (rzadki),
- $A \in R^{m \times n}$  – macierz pomiaru,
- $s$  – rzadkość sygnału  $x$ ,
- $\delta_s$  – stała izometrii macierzy  $A$ .

Własność ta gwarantuje, iż możliwa będzie poprawna rekonstrukcja sygnału rzadkiego. Mówimy, że macierz  $A$  spełnia własność RIP, jeżeli wartość  $\delta_s$  jest istotnie różna od jedynki. Gdy ta własność jest spełniona, macierz pomiaru zachowuje długości wektorów, co z kolei implikuje, że wszelkie dokonane pomiary nie będą produkować wektorów zerowych. Dzięki temu możliwa będzie rekonstrukcja sygnału, gdyż w procesie pomiaru nie będzie tracona informacja o nim.

Cechą jaką musi posiadać macierz, która zachowuje odległości jest ortogonalność. Trudno jednak mówić o ortogonalności macierzy, która nie jest macierzą kwadratową. Macierz  $A$  musi zatem zachowywać się jak macierz ortogonalna, dowolny podzbiór kolumn macierzy  $A$  musi być w przybliżeniu ortogonalny.

Pozostaje jeszcze pytanie, czy do każdego zadania musimy stosować inne macierze pomiarowe, czy musimy je w specjalny sposób projektować, jeśli tak to w jaki? Czy konieczna jest wiedza nt. naturalnej bazy sygnału, by być w stanie zaprojektować macierz pomiarową? Okazuje się (szczęśliwie), że nie. Możliwe jest wybranie bazy pomiarowej gwarantującej niską koherencję bez wcześniejszej znajomości bazy sygnału. Jak wykazali twórcy metod próbkowania oszczędnego, możliwe jest zastosowanie macierzy losowych o różnych rozkładach, m.in. o rozkładzie Gaussa [1, 4].

## 5. Rekonstrukcja

Pomiar danych można zaprezentować przy pomocy operacji macierzowych, gdzie macierz pomiaru działamy na wektor reprezentujący sygnał. W wyniku takiej operacji otrzymywany jest wektor reprezentujący badany sygnał w rzutowaniu na wzorce określone w macierzy pomiaru. Matematycznie proces ten można zapisać jako:

$$y = Ax \quad (17)$$

gdzie:

- $x$  – badany sygnał,
- $A$  – macierz pomiaru,
- $y$  – wektor pomiaru..

Rekonstrukcja takiego sygnału, w przypadku gdy macierz  $A$  jest macierzą kwadratową jest operacją prostą, wymaga przemnożenia wektora  $y$  przez macierz odwrotną do  $A$ . Przy stosowaniu metod próbkowania oszczędnego macierz  $A$  nie jest jednak macierzą kwadratową. Ilość realizowanych pomiarów jest znacznie mniejsza od ilości składowych sygnału badanego. Macierz  $A$  jest macierzą prostokątną, gdzie ilość wierszy tej macierzy odpowiada rozmiarowi wektora  $y$ , a więc ilości dokonanych pomiarów.

W przypadku metod próbkowania oszczędnego ilość pomiarów jest wielokrotnie mniejsza od rozmiaru sygnału. Rekonstrukcja sygnału z takich niepełnych danych poprzez rozwiązanie prostego układu równań daje wiele możliwych rozwiązań (pozwala jedynie na wyznaczenie zależności pomiędzy zmiennymi). Konieczne jest wprowadzenie dodatkowych warunków, które zapewniają jednoznaczność rozwiązań.

Takim dodatkowym warunkiem w rozwiązaniu wyżej przedstawionego problemu może być fakt, iż badany sygnał ma być sygnałem rzadkim, a co za tym idzie znaczna część jego składowych powinna być równa 0. Zatem problem można sprowadzić do postaci:

$$\min_x \|x\|_{l_0} \Big|_{Ax=y} . \quad (18)$$

Problem ten można opisać słownie jako rozpatrzenie wszystkich rozwiązań  $Ax=y$ , a następnie wybranie tego, które minimalizuje ilość składowych niezerowych. Takie postawienie sprawy powoduje zmianę charakteru problemu z kombinacyjnego na optymalizacyjny.

Norma  $l_0$  mierzy ilość niezerowych elementów w wektorze. Niestety powyższy problem jest problemem NP-zupełnym i w praktyce nie jest możliwe jego rozwiązanie w sensownym czasie. Konieczne zatem jest zastąpienie normy  $l_0$  inną normą. Standardowo stosowaną w tego typu problemach stosowaną normą jest norma  $l_2$ :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}. \quad (19)$$

Jej zastosowanie nie daje jednak dobrych wyników. Norma ta faworyzuje istnienie wielu składowych sygnału o niewielkich wartościach. W metodach próbkowania oszczędnego konieczne jest odszukanie niewielkiej ilości składowych o istotnych wartościach. Niezbędne jest zatem zastosowanie innej normy. Twórcy metody zaproponowali zastosowanie tutaj normy  $l_1$ [3,4]:

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i| \quad (20)$$

Ostatecznie problem rekonstrukcji danych w metodach próbkowania oszczędnego można ogólnie przedstawić jako metodę optymalizacyjną sformułowaną następująco

$$\min_x \|x\|_1 \Big|_{Ax=y} \quad (21)$$

Tak postawiony problem jest równoważny problemowi programowania liniowego o wielomianowej złożoności obliczeniowej.

## 6. Przykład zastosowania próbkowania oszczędnego

Na rysunku 4a) przedstawiony został obraz prezentujący wynik rentgenowskiego badania gęstości kości, wykonany jako badanie progowe (wyszukiwanie obszarów o gęstości mniejszej niż podany próg). Jak widać, obraz ten jest obrazem rzadkim w swojej naturalnej postaci. Duże powierzchnie tego obrazu są jednokolorowe. Aby uzyskać taki obraz w diagnostyce medycznej, konieczne jest wykonanie wielu pomiarów. Wydaje się (w świetle wcześniej przedstawionych faktów), iż idealnym byłoby zastosowanie w takim badaniu metod próbkowania oszczędnego. Jak pokazują wykonane obliczenia numeryczne, w przypadku takiego obrazu, wystarczy niewielka informacja na jego temat, by dokonać wiernej rekonstrukcji.

Na rysunku 4b) przedstawiony jest wykres wierności rekonstrukcji w funkcji ilości danych wstępnych posiadanych nt. obrazu. Oś  $y$  ukazuje względny udział pikseli źle zrekonstruowanych. Jak widać, pomiar danych rzędu 9% wystarcza do osiągnięcia wiernej rekonstrukcji obrazu (wszystkie piksele zostały wierne zrekonstruowane). Obliczenia przeprowadzone zostały zgodnie z algorytmami zaprezentowanymi w pakiecie  $l_1$ -magic [6].

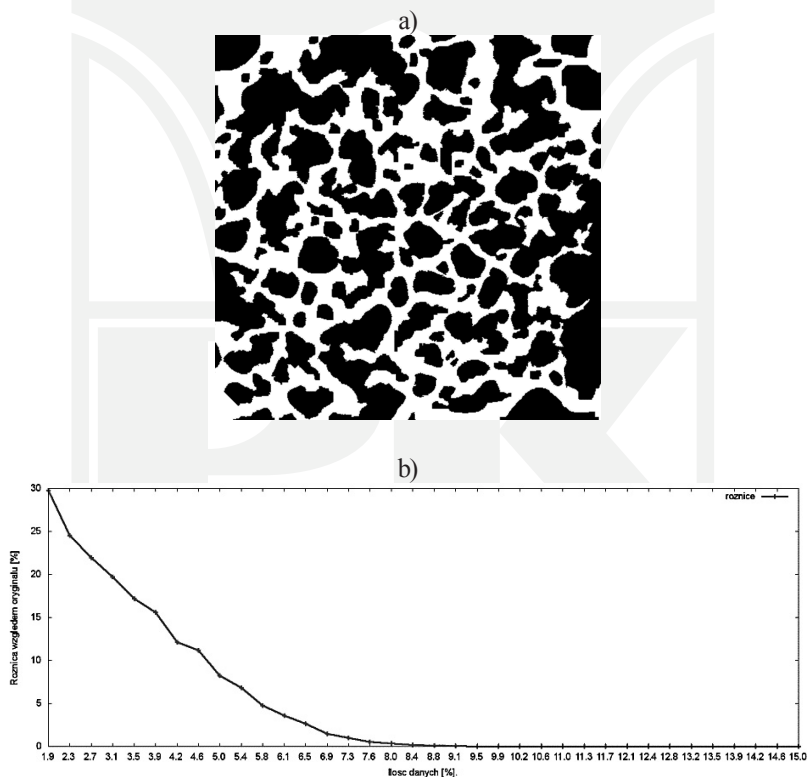
## 7. Wnioski

Próbkowanie oszczędne jest polega na zmniejszeniu wymaganej ilości pomiarów w procesie akwizycji danych. Akwizycja przeprowadzana jest z częstością znacznie mniejszą niż częstość Nyquista. Próbkowanie oszczędne wprowadza już na etapie akwizycji danych pro-

ces odpowiadający kompresji w klasycznym podejściu. Akwizycja danych przeprowadzana jest w taki sposób, aby w jej wyniku nie uzyskiwać danych nadmiarowych. Jest swoistego rodzaju połączeniem samej akwizycji z procesem kompresji.

Pojawia się oczywiście problem, w jaki sposób ustalić, które elementy sygnału należy próbkować, aby taki pomiar pozbawiony był nadmiarowości, a wierna rekonstrukcja sygnału była możliwa. W idealnej sytuacji sposób pomiaru musi być niezależny od charakterystyki sygnału mierzonego. Tylko w takiej sytuacji można mówić o próbkowaniu oszczędnym. Charakterystykę sygnału możemy poznać, gdy będziemy znali sygnał, a tego właśnie chcemy na wstępie uniknąć.

Metody *compressed sensing* ze względu na swoją oszczędność w procesie akwizycji danych są w wielu zastosowaniach niezastąpione. Chodzi tutaj przede wszystkim o wszelkiego rodzaju sytuacje, w których pomiar jest kosztowny, jak np. przy metodach obrazowania dla celów diagnostyki medycznej. Koszt w tym wypadku rozumiany jest jako koszt ekonomiczny (wysoki koszt badania z wykorzystaniem urządzeń diagnostyki medycznej) oraz jako szkodliwy wpływ badań obrazowania medycznego na pacjenta.



Rys. 4. Obraz rzadki, reprezentujący gęstość kości (a) oraz wykres wierności rekonstrukcji obrazu w funkcji ilości danych wstępnych posiadanych nt. obrazu (b)

Fig. 4. Sparse image that represents density of the bone (a) and image reconstruction accuracy as a function of the amount of initial data (b)

Innymi zastosowaniami mogą być takie, w których kosztowny jest przesył bądź składowanie danych. W szczególności metody *compressed sensing* można wykorzystać do kompresji danych, a co za tym idzie zmniejszyć ilość danych przesyłanych bądź składowanych. W sytuacjach, gdzie nadajnik ma ograniczoną energię (zasilane bateryjnie urządzenia umieszczone w trudno dostępnych miejscach), ilość danych, jakie należy przesłać, ma niebagatelne znaczenie.

Próbkowanie oszczędne posiada także cechy szyfrowania danych. W procesie akwizycji wykorzystywana jest losowa macierz. Aby dokonać rekonstrukcji sygnału, konieczna jest znajomość tej macierzy. Bez jej znajomości proces rekonstrukcji nie jest możliwy.

Z metodami próbkowania oszczędnego powiązanych jest jednak wiele problemów. Podstawowym z nich jest złożoność procesu rekonstrukcji sygnału z niepełnych danych, gdzie wymagana jest duża moc obliczeniowa. Konieczne wydaje się zaproponowanie nowych, wydajnych oraz skutecznych (gwarantujących wysoką jakość) metod rekonstrukcji. Rozsądnym wydaje się być także zastosowanie odpowiedniego sprzętu obliczeniowego gwarantującego odpowiednio dużą moc obliczeniową, a co za tym idzie krótki czas rekonstrukcji.

#### Literatura

- [1] Candes E., Wakin M., *An Introduction To Compressive Sampling*, IEEE Signal Processing Magazine, tom 25, Wyd. 2, 2008, 21-30.
- [2] Candes E., Romberg J., Tao T., *Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information*, IEEE Transactions on Information Theory, tom 52, Wyd. 2, 2006, 489-509.
- [3] Donoho D., *Compressed Sensing*, IEEE Transactions on Information Theory, tom 52, Wyd. 4, 2006, 1289-1306.
- [4] Candes E., Tao T., *Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?*, IEEE Transactions on Information Theory, tom 52, Wyd. 12, 2006, 5406-5425.
- [5] Candes E., Romberg J., *Sparsity and incoherence in compressive sampling*, Inverse Prob., tom 23, Wyd. 3, 2007, 9690985.
- [6] Candes E., Romberg J.,  *$l_1$ -magic: Recovery of sparse signals via convex programming*, Caltech, 2005.
- [7] Candes E., *The restricted isometry property and its implications for compressed sensing*, Science Direct Theory of Signals/Mathematical Analysis, tom 1, 2008, 589-592.